Оглавление

Предисловие

Данный курс математического анализа создан на основе лекций, прочитанных автором на факультете вычислительной математики и кибернетики (ВМК) Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова и в его филиале в г. Ереване. Несмотря на обилие замечательных монографий (О.В. Бесов [3], В.А. Зорич [8, 9], В.А. Ильин, Э.Г. Позняк [10, 11], В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов [12, 13], С.М. Никольский [17, 18], Ю.Г. Решетняк [20, 21, 22, 23], У. Рудин [24], Г.М. Фихтенгольц [26, 27, 28], Т. Апостол [32], Т. Тао [53, 54] и другие), автор счёл необходимым создание нового курса, основная цель которого предельно проста: дать полное, последовательное, математически строгое и при этом максимально компактное изложение всех основных входящих в программу этого курса определений, формулировок и доказательств. Особое внимание уделяется снятию лишних требований при формулировках утверждений, а также общности и применимости этих формулировок. Автор также стремился сделать курс по возможности самодостаточным, поэтому в него включены некоторые сведения из других разделов математики: теории множеств, алгебры, общей топологии. Для достижения поставленных целей использовались материалы большого числа классических и современных монографий, статей, а также интернет-заметок, опубликованных в последние годы. Ряд определений и теорем данного курса принадлежат автору (см., в частности, [45, 46]).

Наряду с отмеченными выше идейными соображениями, перечислим некоторые конкретные особенности данного курса:

- Натуральные числа вводятся при помощи аксиоматики теории множеств. Вещественные числа строятся на основе натуральных при помощи той же аксиоматики теории множеств, при этом уделяется особое внимание аксиоматике *полного упорядоченного поля*, вполне определяющей множество вещественных чисел.
- Особое внимание уделяется группе утверждений, эквивалентных принципу полноты вещественных чисел, где эквивалентность понимается в структуре (архимедова) упорядоченного поля.
- Для определения всех *пределов* мы придерживаемся единой концепции предела функции в *топологических пространствах*. Это позволяет последовательно развивать теорию, не привлекая при этом альтернативные определения предела (например, *предел по базе*).

- Особое внимание уделяется аккуратному определению тригонометрических функций с сохранением концепций, принятых в курсе элементарной математики. При этом приходится определять эти функции как на множестве *геометрических углов на плоскости*, так и на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Такой подход, хотя и требует знаний, выходящих за рамки курса Анализа I, позволяет разорвать порочный круг при выводе первого замечательного предела.
- Даны аккуратные определения и формулировки основных свойств о-малых, старших производных неявной параметрически заданной функции, выпуклых функций, точек перегиба графика функции, комплексных чисел, многочленов и рациональных функций.
- При формулировке теорем и изложении методов интегрирования конкретизируются промежутки, на которых ищется та или иная первообразная. В частности, теорема о замене переменной доказана для пары произвольных невырожденных промежутков.
- Продемонстрирована тесная связь понятия *спрямляемости* кривой с классом *функций ограниченной вариации*, при этом непрерывность отнесена на второй план в силу её неадекватности понятию спрямляемости.
- Мера Жордана введена в пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольной размерности, и особое внимание уделяется её свойствам, которые от размерности не зависят. При изложении этой теории были сведены к минимуму ссылки на геометрические утверждения, не входящие в обязательную школьную программу. Также доказана теорема о представлении меры Жордана интегралом от характеристических функций, устанавливающая связь между мерой Жордана и интегралом Римана.
- Так как одним из основных разделов данного курса является изложение теории *дифференциального исчисления*, центральным объектом изучения выбраны функции, действующие в *нормированных* (а не в метрических или топологических) пространствах. В связи с этим кратко изложены основные определения и свойства нормированных пространств. Понятие дифференцируемости функции многих переменных, как и во многих известных монографиях (например, [8, 21, 24, 32, 54]), вводится с использованием *линейных операторов*.
- Вместо индуктивных определений для частных производных и дифференциалов высших порядков даны определения в терминах *композиций операторов дифференцирования*, что автоматически позволяет пользоваться *ассоциативностью* композиции при рассмотрении этих объектов. Также при таком подходе нет необходимости ссылаться на «мнемонические правила» и «условные обозначения», так как все символы однозначно определены в операторной алгебре.

- Приведено предложенное Валле–Пуссеном (см. [6], [10], [12]) определение k-кратной дифференцируемости функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x}_0$ через дифференцируемость её частных производных порядка $k-1$ в этой точке. Показано, что для k раз дифференцируемых по этому определению функций верна обобщённая теорема Янга, а также теорема Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
- Предложено изложение теории условного экстремума, включающее необходимое, а также достаточное условие 2-го порядка с новым более компактным обоснованием.
- Даны оригинальные (и наиболее компактные из всех известных автору) доказательства теорем о критериях интегрируемости по Риману, о замене переменной в несобственном интеграле (в формулировке которой отсутствует излишнее требование монотонности функции, осуществляющей соответствующую замену), о площади следа спрямляемой плоской кривой, об эквивалентности двух определений многократной дифференцируемости функции в точке, теоремы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, в формулировке которой удалось ослабить требование k-кратной дифференцируемости по Фреше, а также ряда других.

В качестве дополнительного материала присутствуют:

- Наиболее компактное из всех известных автору доказательство критерия Лебега интегрируемости функции по Риману, основанное на лемме о существовании разбиения Хенстока.
- Определение некоторого универсального топологического пространства, включающего в себя несобственные точки как элементы. С его помощью можно обойтись без рассмотрения $6^3 = 216$ различных *баз* для определения предела функции $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\big($например при $(x, y, z) \to (3+, -\infty, 27)\big)$. В силу того, что построенное пространство удовлетворяет *первой аксиоме счётности*, мы автоматически получаем справедливость определения Гейне для всех типов пределов, которые рассматриваются в стандартных курсах анализа.
- Доказательство инвариантности жордановой меры не только относительно сдвигов, но и относительно любых изометрических преобразований любого измеримого множества.
- Полное доказательство основной теоремы алгебры, которая существенно используется в главе, посвящённой нахождению первообразных. Это доказательство использует лишь материал, изложенный в этом курсе.
- Аккуратные определения классов $D^k(\Omega, H, N)$ и $C^k(\Omega, H, N)$ k раз дифференцируемых и непрерывно дифференцируемых функций $f\colon H \to N$, где H, N — *нормированные пространства* и $\Omega \subset H$. Доказаны теоремы о принадлежности композиций функций из рассмотренных выше классов при

фиксированном k тем же классам гладкости. Для композиции дважды дифференцируемых функций в явном виде получена формула вычисления второго дифференциала в терминах первого и второго дифференциалов от функций, образующих рассматриваемую композицию (известная автору работа [37], в которой выводится общая формула типа Фаа-ди-Бруно, использует технику, требующую свободного владения университетским курсом функционального анализа, и, кроме того, сформулирована при излишних предположениях банаховости соответствующих пространств и принадлежности исходных функций классам C^k на соответствующих *открытых* множествах).

- Формулировка и доказательство теоремы, являющейся прямым обобщением теоремы Янга на случай частных производных произвольного порядка, доказательство (или хотя бы точную формулировку) которой в известных источниках автору обнаружить не удалось.

Теоремы нумеруются в пределах параграфа. При ссылке на теорему другого параграфа той же главы первая цифра означает номер параграфа, при ссылке на теорему другой главы первая цифра означает номер главы, вторая — номер параграфа. Так, теорема 2 — это теорема 2 из того же параграфа, теорема 3.2 — это теорема 2 § 3 из той же главы, а теорема 6.3.2 — это теорема 2 § 3 из главы 6. То же относится ко всем определениям, леммам, утверждениям, примерам, следствиям и замечаниям. Формулы нумеруются в пределах параграфа, нумерация рисунков сквозная. Также мы придерживаемся соглашения $0^0 = 1$ во всех формулах, где подобное выражение возникает.

Данный учебник издается в печатном и электронном форматах. При создании электронной версии особое внимание уделялось интерактивности: все элементы оглавления, предметного указателя, списка обозначений, а также все ссылки при нажатии на них отсылают читателя на соответствующий элемент в тексте, что полностью соответствует современной тенденции создания электронных учебников.

Автор выражает благодарность студентам факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова Б. Валиахметову, О. Васянину, С. Данилову, М. Мордвинцеву, А. Репину, М. Чернявскому за помощь в оформлении текста. Особую благодарность автор выражает А. Владимирову, О. Кудрявцевой и А. Михайлову, фактически взявшему на себя роль технического редактора первоначальной электронной версии.

А. Кулешов